

Seminarvortrag

Josephson-Kontakte als Qubits

Markus Krämer

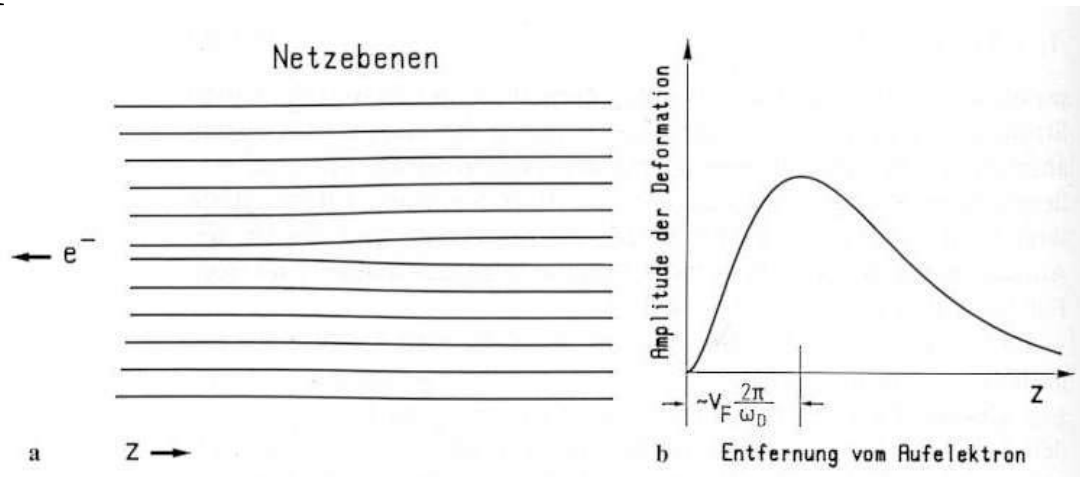
03.07.2001

Übersicht

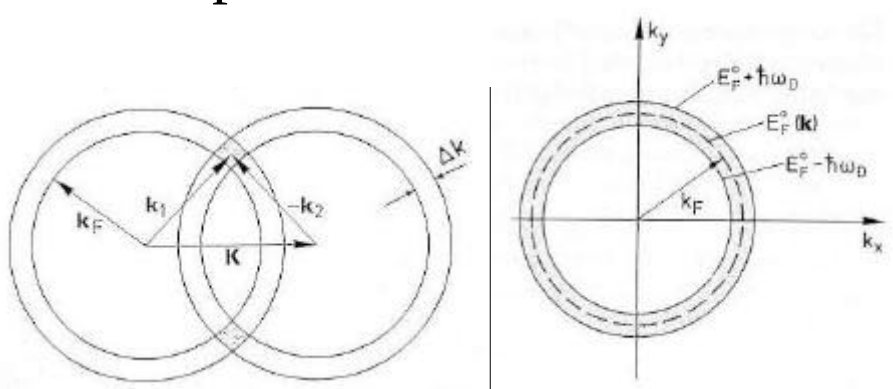
1. Supraleitung
2. Josephson-Kontakte
3. SQUID
4. Einzelelektronen-Transistor
5. Quanten-Operationen
6. Josephson-Kontakte als Qubits
7. Auslesevorgang
8. Experimentelle Realisierungen
9. Literaturangaben

1. Supraleitung

phononinduzierte Elektron-Elektron-WW



Kugelschalen mit Radius k_{Fermi} und Dicke Δk
 Elektronpaarstöße mit $k_1 + k_2 = k_1' + k_2' = K = \text{const.}$



Anzahl der Paare ist proportional zum
 Volumen der Kugel im k -Raum

Bei schwacher WW $V_0 Z(E_F^0) \ll 1$ berechnet
 man Energieabsenkung bei Kondensation:

$$\epsilon \approx -2 \hbar \omega_D \exp(-2/V_0 Z(E_F^0))$$

BCS-Grundzustand

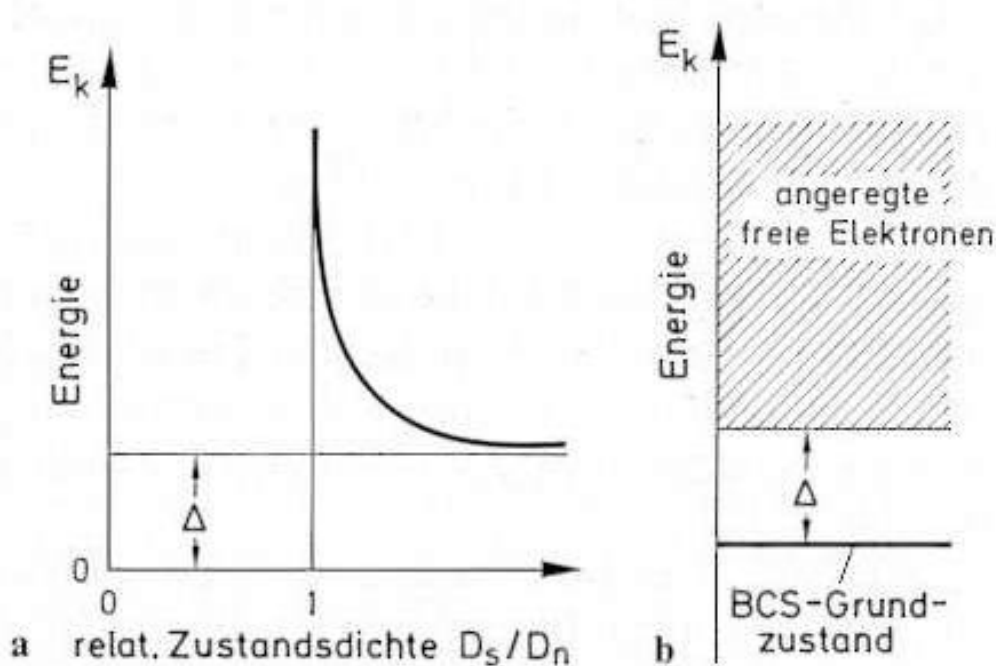
Alle Cooperpaare im selben Grundzustand.
Zum Aufspalten eines CPs Energie 2Δ nötig.

Bei schwacher WW $V_0 Z(E_F^0) \ll 1$ ist:

$$\Delta \approx 2 \hbar \omega_D \exp(-1/V_0 Z(E_F^0))$$

Messung der Lückenenergie z.B. über
Spektroskopie:

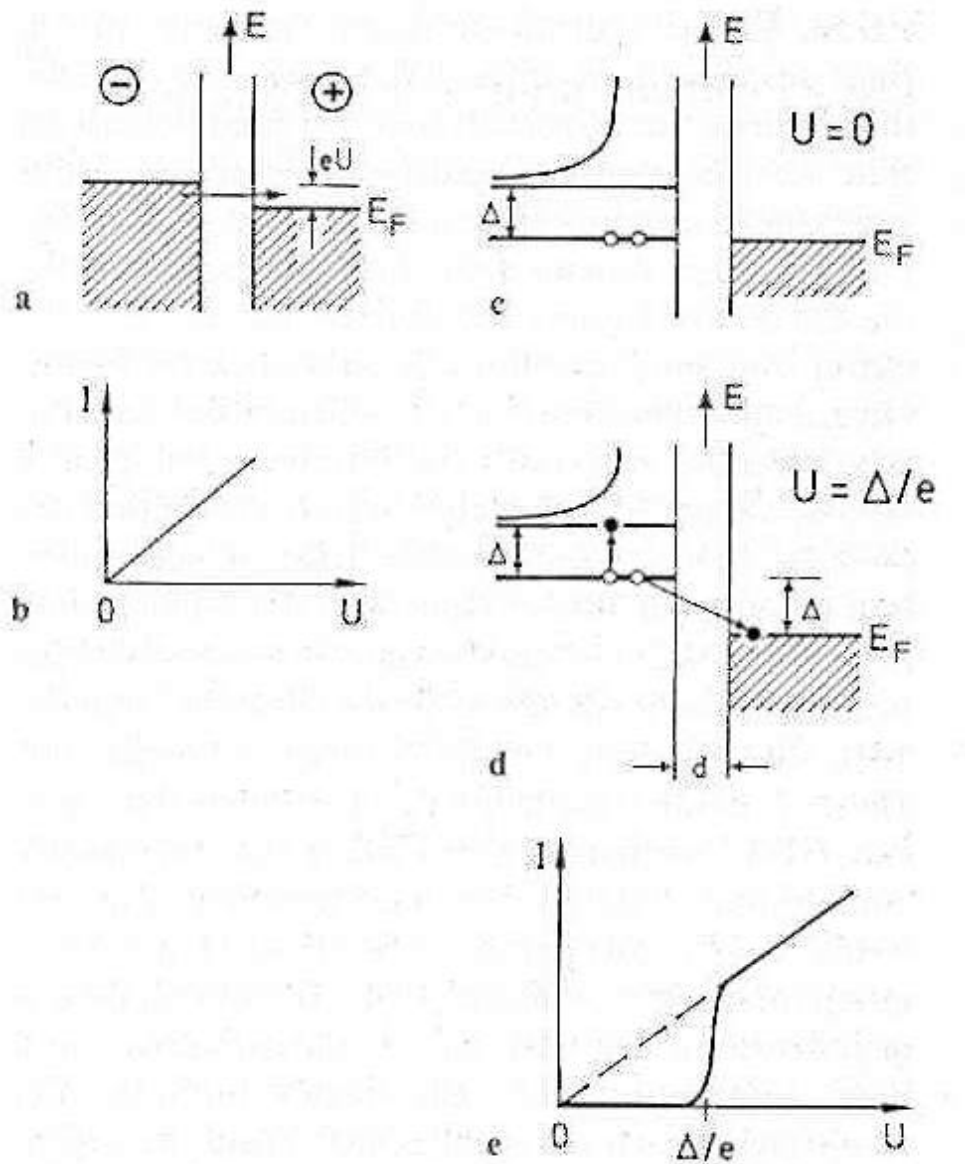
em-Strahlung wird erst ab $\hbar \omega > 2\Delta$ absorbiert,
darunter Totalreflexion



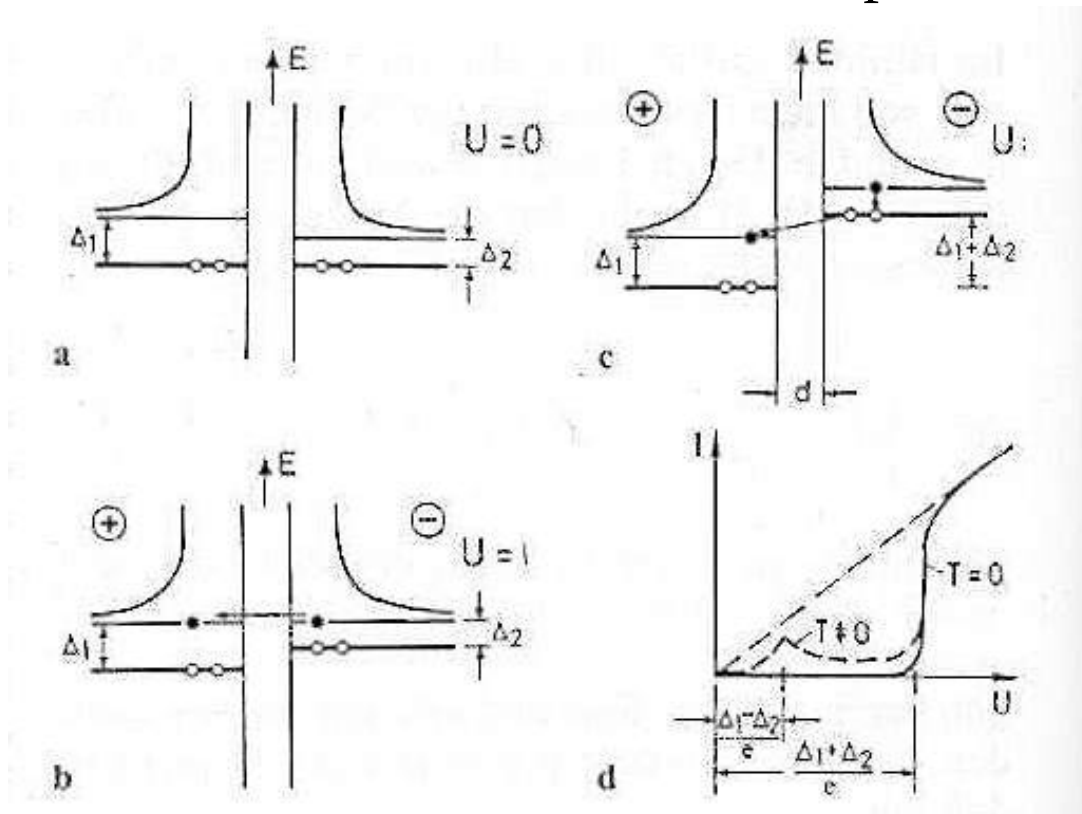
2. Josephson-Kontakte

Tunnelwahrscheinlichkeit bei Normalleitern:

$$W = y y^* \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar} d \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$



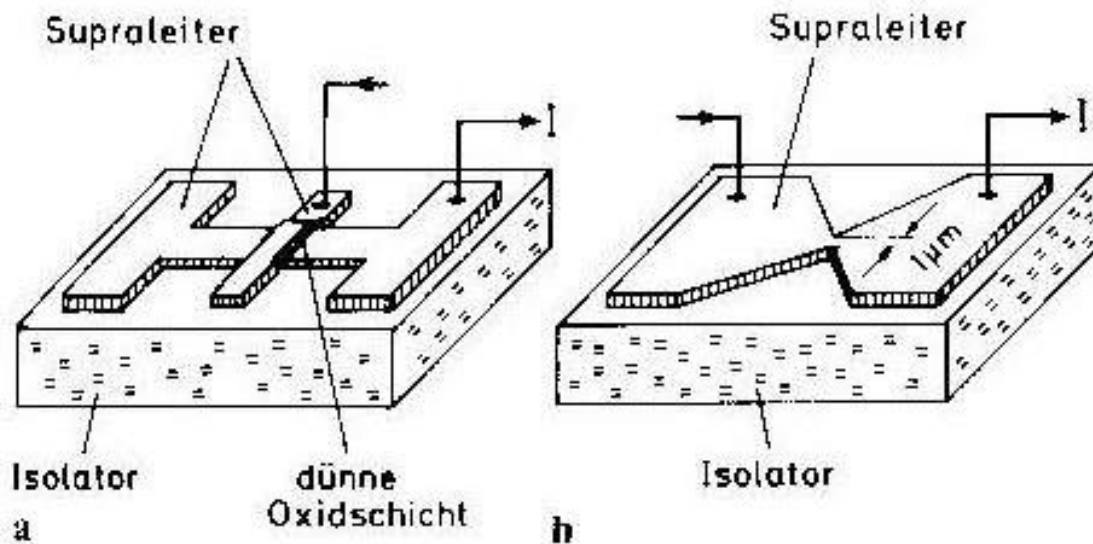
Einelektron-Tunneln zwischen Supraleitern



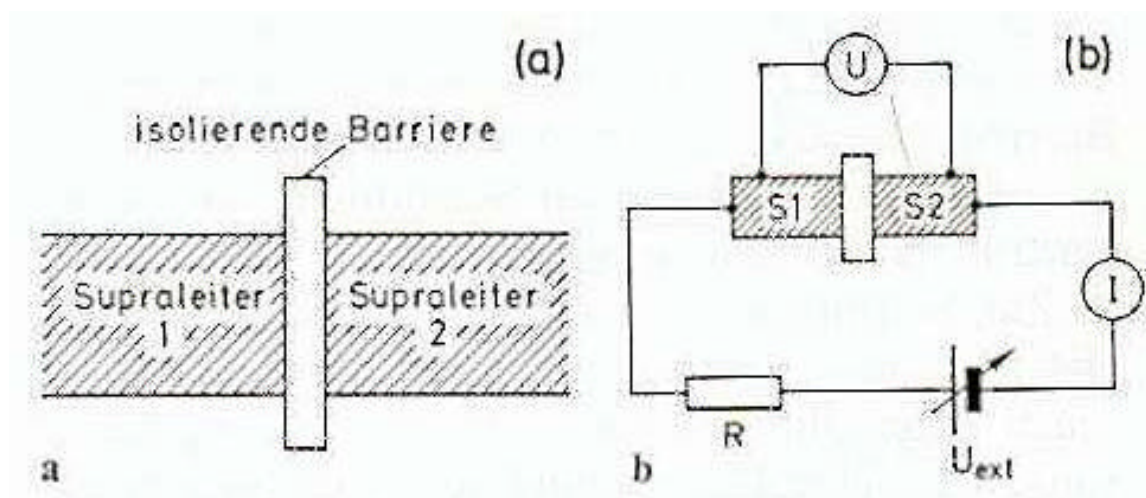
c: normaler Tunnelstrom möglich mit
 $U > (\Delta_1 + \Delta_2)/e$

b: elastisches Tunneln (bei $T > 0$) möglich mit
 $U > (\Delta_1 - \Delta_2)/e$

Cooper-Paar-Tunneln / Josephson-Effekt



technische Realisierungen



a: Schema einer Tunneldiode

b: Meßapparatur

Schrödingergleichungen mit Kopplung T

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = H_1 \Phi_1 + T \Phi_2 \quad i\hbar \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = H_2 \Phi_2 + T \Phi_1$$

Anlegen einer Spannung U

$$i\hbar \dot{\Phi}_1 = \frac{qU}{2} \Phi_1 + T \Phi_2 \quad i\hbar \dot{\Phi}_2 = -\frac{qU}{2} \Phi_2 + T \Phi_1$$

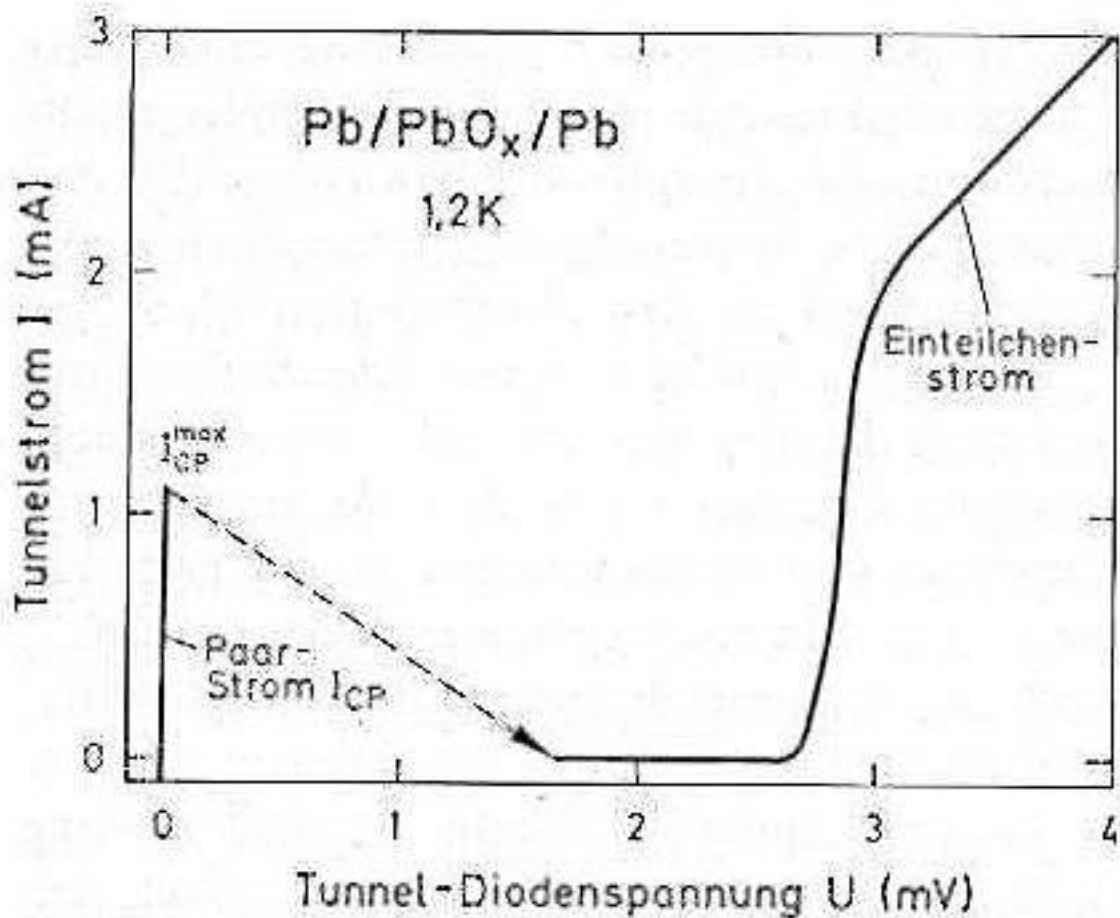
$$|\Phi|^2 = n_c \text{ (Dichte CP)} = n_s/2 \text{ (Elektronendichte)}$$

$$\Phi_1 = \sqrt{n_{c1}} \exp(ij_1) \quad \Phi_2 = \sqrt{n_{c2}} \exp(ij_2)$$

$$\dot{n}_{c1} = \frac{2T}{\hbar} n_c \sin(j_2 - j_1) = -\dot{n}_{c2}$$

$$\hbar(j_2 - j_1) = -qU$$

=> Stromfluß ohne Spannungsabfall!



Phasendifferenz zeitabhängig:

$$j_2 - j_1 = \frac{2}{\hbar} e U t + \Delta j_{init}$$

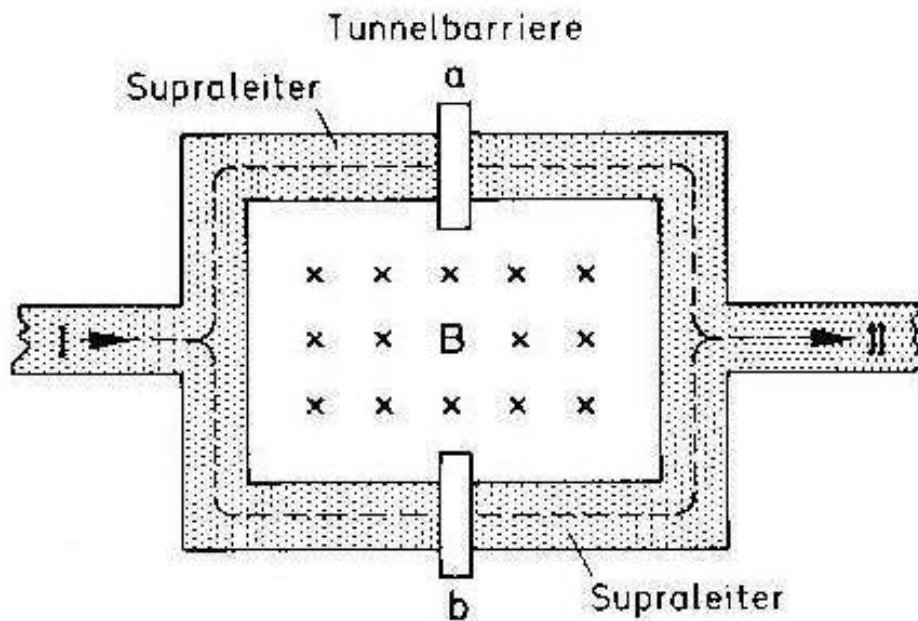
Tunnel-Wechselstrom

$$I_{cp} \approx \dot{n}_{c1} = \frac{2}{\hbar} T n_c \sin(w_{cp} t + \Delta j_{init})$$

$$w_{cp} = \frac{2}{\hbar} e U$$

3. SQUID

Superconducting Quantum Interferometer Device



Phasensprung an Tunnelbarrieren: δ_a und δ_b

$$I_a = I_0 \sin \delta_a \quad I_b = I_0 \sin \delta_b$$

Phasenverschiebung durch Magnetfeld:

$$\Delta j \Big|_X^Y = \int_X^Y \nabla j \cdot ds \equiv \frac{2e}{\hbar} \int_X^Y A \cdot ds$$

Gesamte Phasenverschiebung

$$d_a - d_b = \frac{2e}{\hbar} \oint A \cdot ds = \frac{2e}{\hbar} \int B \cdot df = \frac{2e}{\hbar} \cdot \Phi$$

Gesamtstrom durch den SQUID:

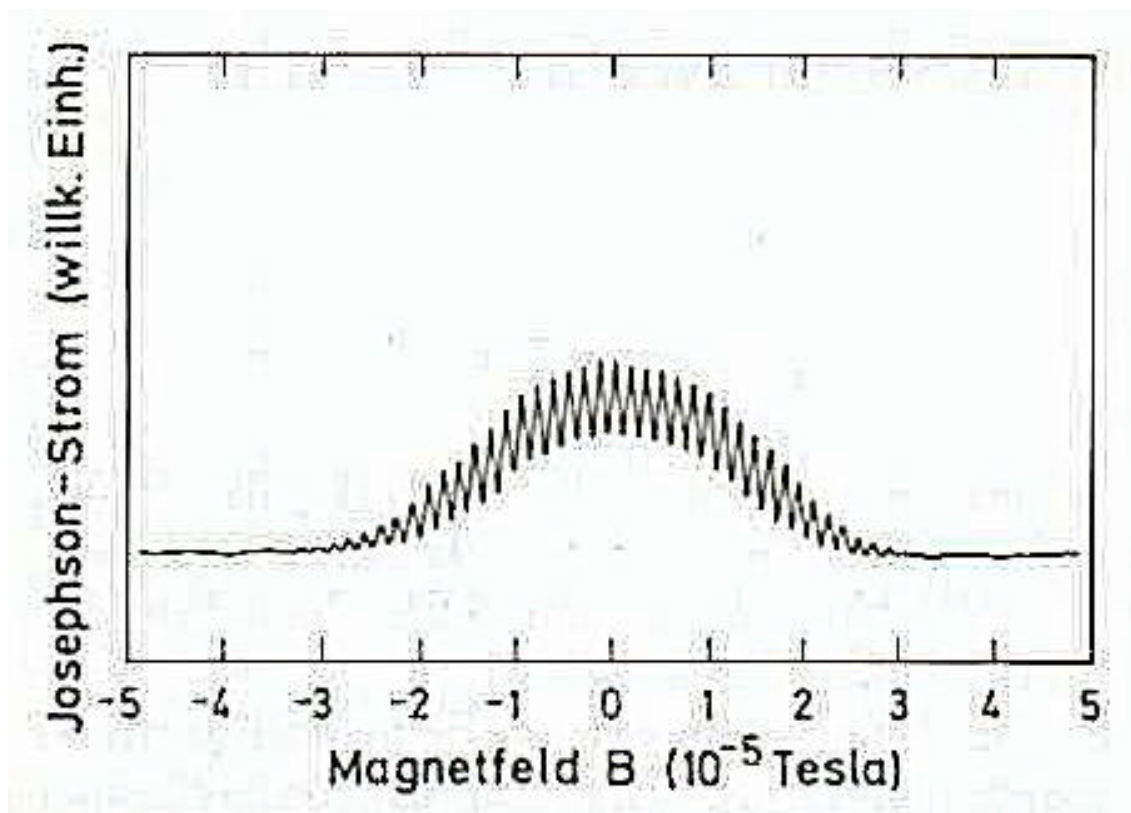
$$I = 2I_0 \sin d_0 \cos\left(\frac{e}{\hbar} \int B \cdot df\right)$$

=> steuerbar durch B!

Maxima von I bei

$$\int B \cdot df = N \frac{p \cdot \hbar}{e}$$

(Vielfache des magnetischen Flußquants)



4. Einzelelektronen-Transistor

Single Electron Transistor (SET)

Tunnelrate zwischen zwei Energiezuständen
($E_1 > E_2$) mit Differenz ΔE

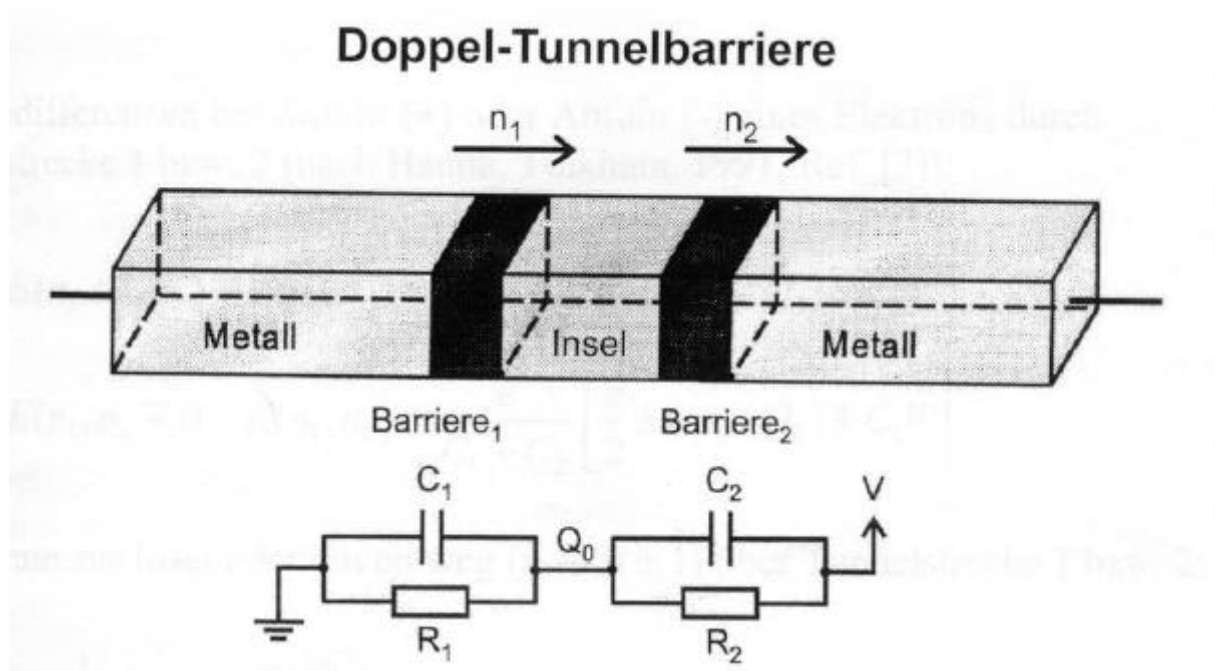
$$\Gamma(\Delta E) \approx \frac{2p}{\hbar} |T|^2 D_1 D_2 \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) (1 - f(E - \Delta E))$$

daraus kann man berechnen

$$\Gamma(\Delta E) = \frac{1}{R_T e^2} \cdot \frac{-\Delta E}{1 - \exp(\Delta E / k_B T)} \quad \text{mit} \quad R_T = \frac{\hbar}{2pe^2 |T|^2 D_1 D_2} = \text{const.}$$

Mit $-\Delta E = eV \gg k_B T$ folgt daraus

$$I = e\Gamma = \frac{V}{R_T}$$



Ladung auf der Insel:

$$Q = -n e + Q_0 = -e (n_1 - n_2) + Q_0$$

Energie des Systems:

$$\frac{1}{C_1 + C_2} \cdot \left[\frac{1}{2} (C_1 C_2 V^2 + (-ne + Q_0)^2) + eV(C_1 n_2 + C_2 n_1) \right]$$

Energiedifferenz bei Zufuhr/Abfuhr eines Elektrons über Barriere 1 bzw. 2:

$$\Delta E_1^\pm = E(n_1 \pm 1, n_2) - E(n_1, n_2) = \frac{e}{C_1 + C_2} \left[\frac{e}{2} \pm (ne - Q_0) \pm C_2 V \right]$$

$$\Delta E_2^\pm = E(n_1, n_2 \mp 1) - E(n_1, n_2) = \frac{e}{C_1 + C_2} \left[\frac{e}{2} \pm (ne - Q_0) \mp C_1 V \right]$$

Tunnelrate zur/von der Insel

$$\Gamma_{1,2}^\pm(n) = \frac{1}{R_{1,2} e^2} \cdot \frac{-\Delta E_{1,2}^\pm}{1 - \exp(\Delta E_{1,2}^\pm / k_B T)}$$

Tunnelstrom

$$I(V) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) (\Gamma_2^-(n) - \Gamma_2^+(n)) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) (\Gamma_1^+(n) - \Gamma_1^-(n))$$

$p(n)$: Wahrscheinlichkeitsverteilung
für Anzahl der Elektronen auf der Insel

Bedingung für Einzelelektronen-Effekte:

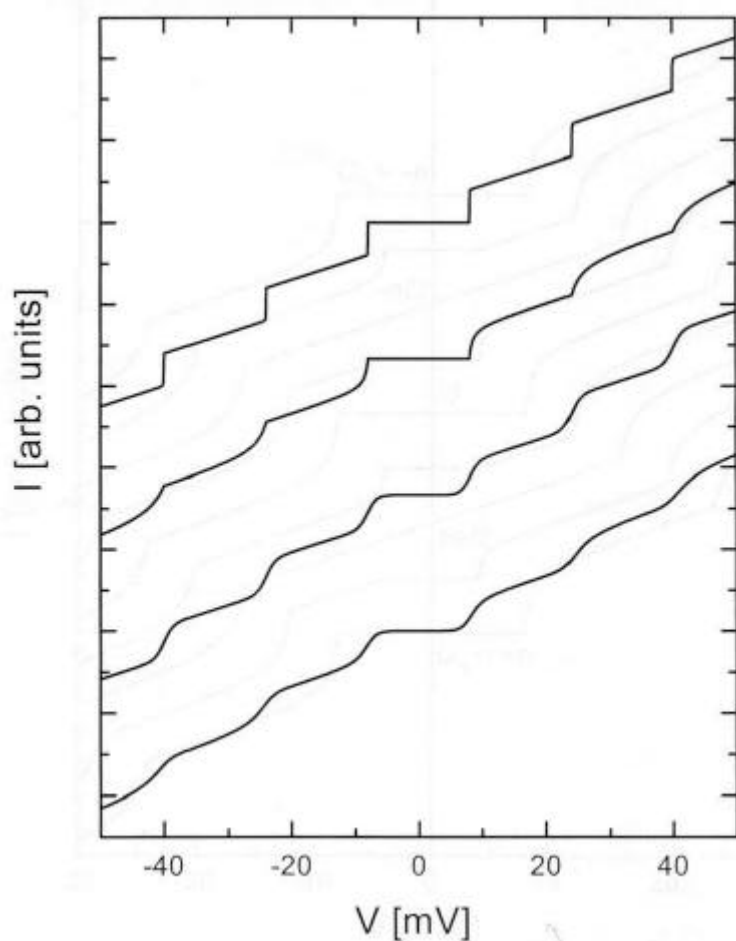
Verweildauer der Elektronen: $\tau = RC$

$$\delta E \approx \hbar/\tau = \hbar/RC \ll \Delta E \approx E_C = e^2/2C$$

$$\Rightarrow R \gg \hbar/e^2 = 25,8 \text{ k}\Omega$$

$$k_B T \ll E_C = e^2/2C \Rightarrow C_{\max} = e^2 / 2k_B T$$

T(K)	$k_B T$ [meV]	$C_{\max}$ [F]	$R_{\max}$ [$\mu\Omega$]	
4,2	0,36	$2,2 \cdot 10^{-16}$	2	flüss. He
77	6,6	$1,2 \cdot 10^{-17}$	0,1	Flüss. N ₂
300	25,9	$3,1 \cdot 10^{-18}$	0,003	Raumtemp.



$$C_1 = C_2 = 10^{-17} \text{ F}; \\ Q_0 = 0; R_2 = 10^9 \Omega$$

Kurven:

$$R_1 = 10^5 \Omega, T = 10 \text{ mK}$$

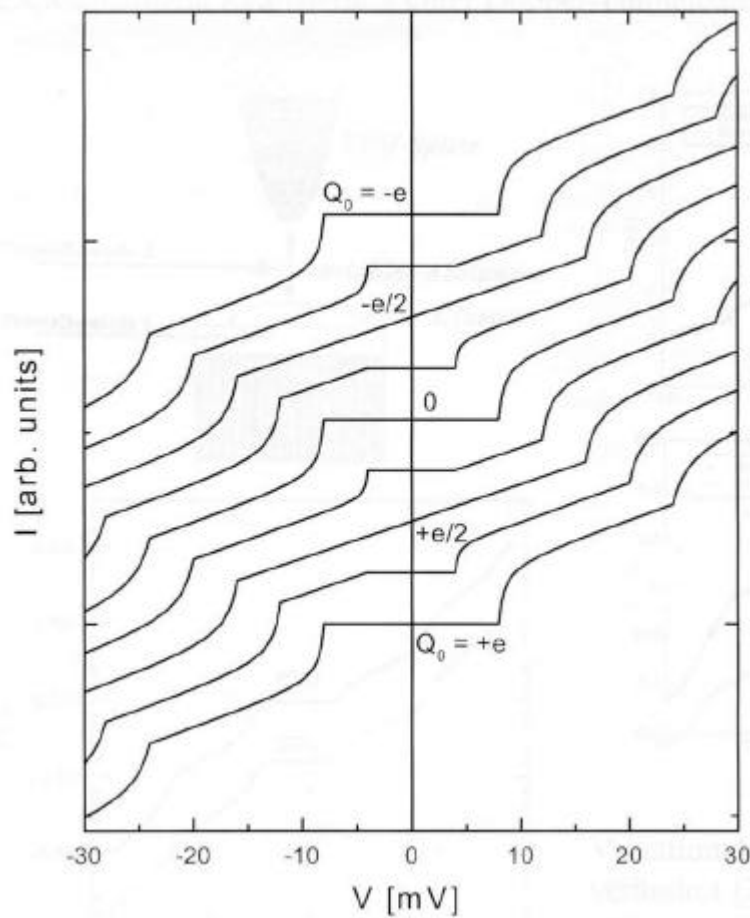
$$R_1 = 3 \cdot 10^7 \Omega, T = 10 \text{ mK}$$

$$R_1 = 10^5 \Omega, T = 4,2 \text{ K}$$

$$R_1 = 3 \cdot 10^7 \Omega, T = 4,2 \text{ K}$$

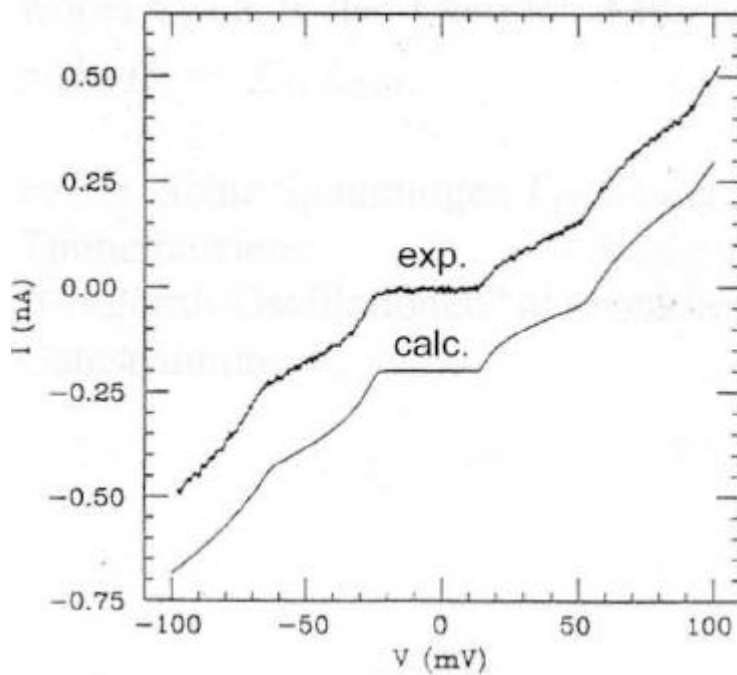
$$|V| \leq \frac{e}{C_1 + C_2} \Rightarrow n = 0$$

„Coulomb-
Blockade“



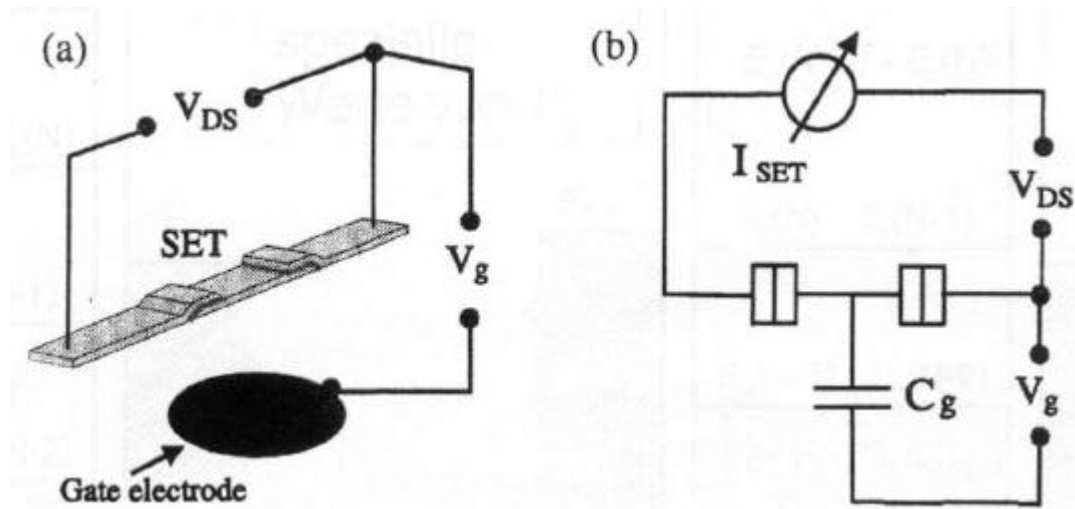
$C_1=C_2=10^{-17}$ F; $R_1=3$
 $10^7 \Omega$; $R_2=10^9 \Omega$;
 $T=10$ mK
 Q_0 wird variiert

Coulomb-Blockade
 verschwindet für
 halbzahlige Q_0
 ($Q_0=\pm e/2; \pm 3e/2; \dots$)

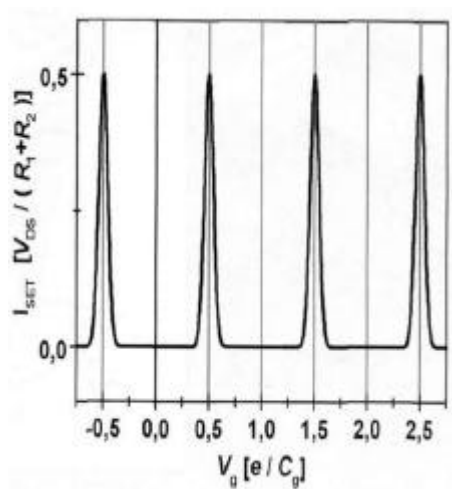


Vergleich
 experimenteller
 und theoretischer
 Werte

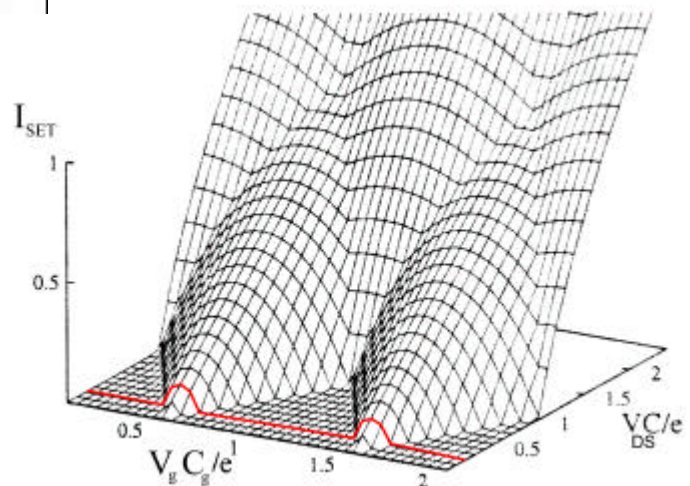
Anwendung als Einzelelektronen-Transistor



induzierte Inselladung: $Q_0 = C_g V_g$



Coulomb-Oszillationen
bei kleinem V_{DS}



5. Quanten-Operationen

$$H = -\sum_{i=1}^N \vec{H}^i(t) \cdot \hat{\vec{s}}^i + \sum_{i \neq j} J^{ij}(t) \cdot \hat{s}_+^i \hat{s}_-^j + H_{meas}(t) + H_{res}$$

Initialisierung:

Anlegen hoher H_z^i bei $H_z^i \gg kT$

Einzel-Bit-Operationen:

Anschalten von H_x^i für Zeit τ

$$U_{1bit}^i(t) = \exp\left(\frac{iH_x^i t \hat{s}_x^i}{\hbar}\right) = \begin{pmatrix} \cos a & i \sin a \\ i \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$
$$a \equiv H_x^i t / \hbar$$

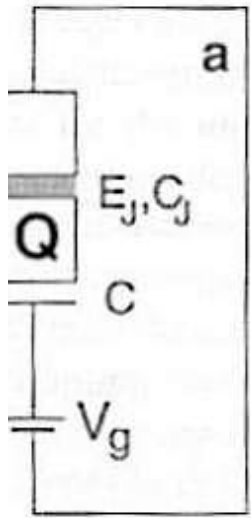
Zwei-Bit-Operationen

Einschalten eines J^{ij} für Zeit τ

$$U_{2bit}^{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & i \sin b & 0 \\ 0 & i \sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = J^{ij} t / \hbar$$

6. Josephson-Kontakte als Qubits



Einfaches Qubit:

Elektronen-Box („Insel“)

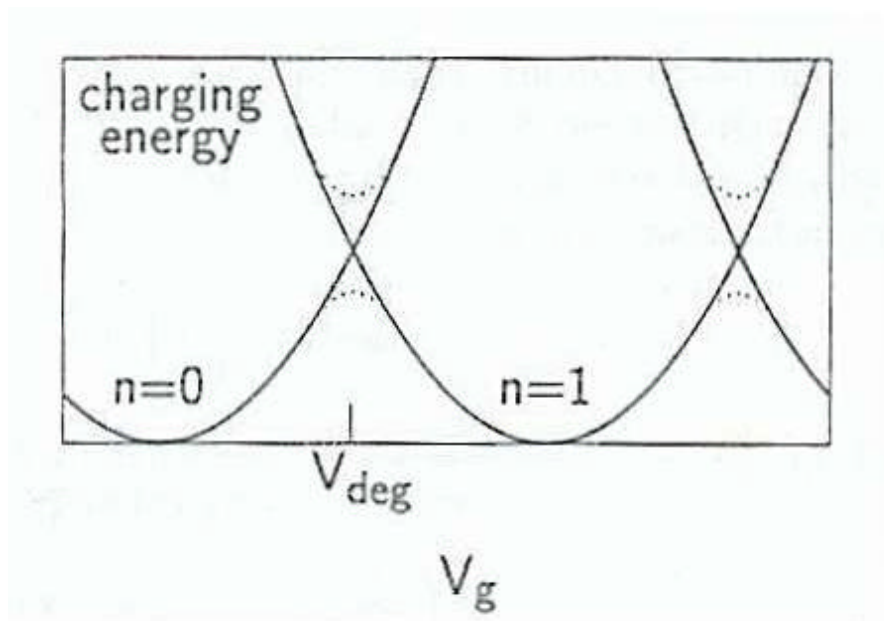
Variablen:

Ladung $Q = 2n e$

Phasendifferenz φ

Hamiltonian:

$$H = \frac{(Q - CV_g)^2}{2(C + C_J)} - E_J \cos j$$



=> Entartung bei $V_g = V_{deg} = (2n+1)e/C$

Zwei-Zustands-Quantensystem

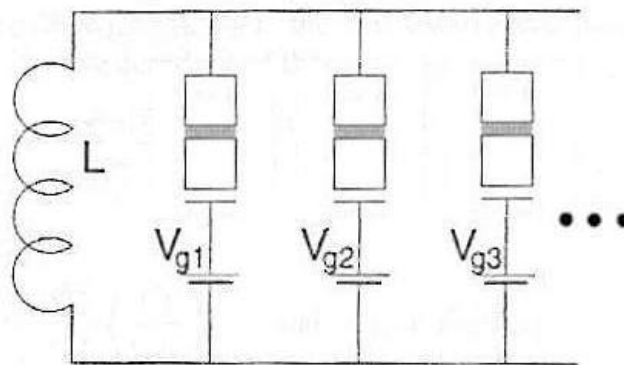
$$n \hat{=} |\uparrow\rangle \quad n+1 \hat{=} |\downarrow\rangle$$

$$H = \frac{dE_{ch}(V_g)}{2} \hat{s}_z - \frac{E_J}{2} \hat{s}_x$$

$$dE_{ch}(V_g) = 2e \frac{C_{qb}}{C_J} (V_x - V_{deg})$$

=> Steuerung von H_z^i

Kopplung von simplen Qubits

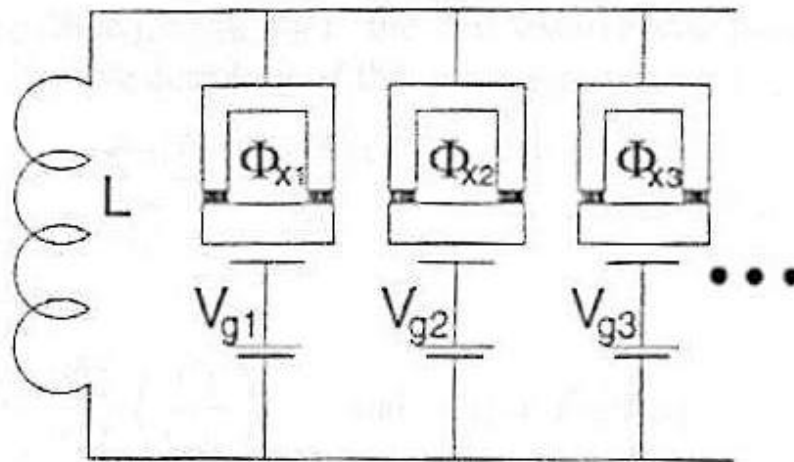


$$J^{ij} \propto \frac{C^2}{C_J^2} \cdot \frac{E_J^2 L}{\Phi_0^2}$$

schwache, konstante Kopplung

Resonanz von zwei Qubits durch Anlegen der gleichen Gatespannung V_g

Kopplung von SQUIDS



$$H = \frac{(Q - CV_g)^2}{2(C + C_J)} - 2E_J^0 \cos\left(p \frac{\Phi_x}{\Phi_0}\right) \cdot \cos j$$

Steuerung der Josephson-Kopplung
über den magnetischen Fluß Φ_x

Ruhezustand:

$$V_g = V_{\text{deg}} \quad \Phi_x = \Phi_0/2 \quad \Rightarrow \quad H = 0$$

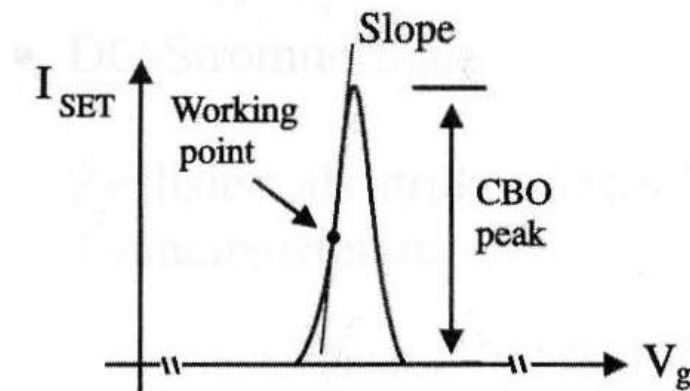
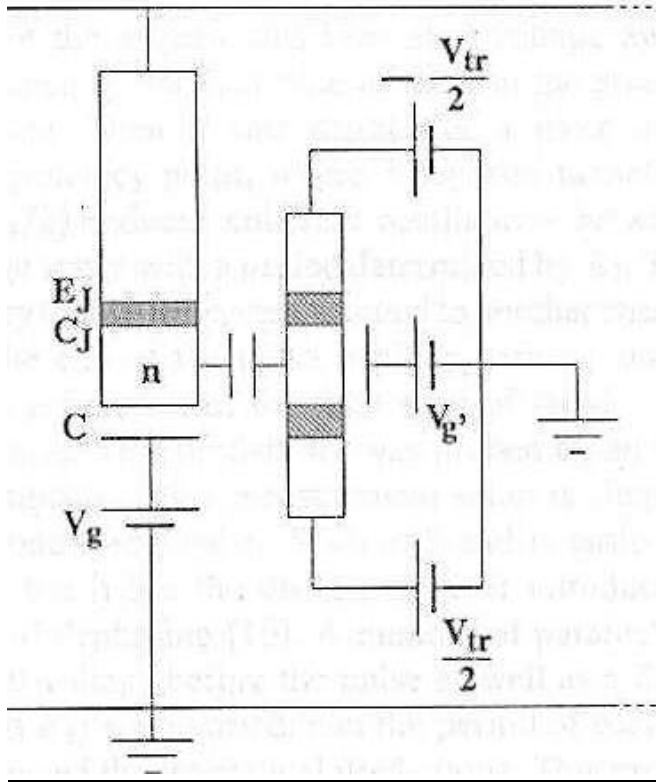
typische Operationszeiten

$$x: \hbar/2\pi E_J$$

$$z: \hbar/2\pi \delta E_{\text{ch}}$$

7. Auslesevorgang

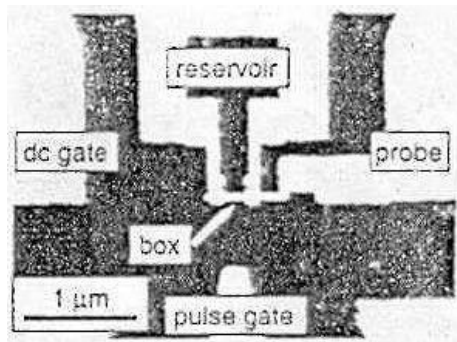
Auslesen durch SET:



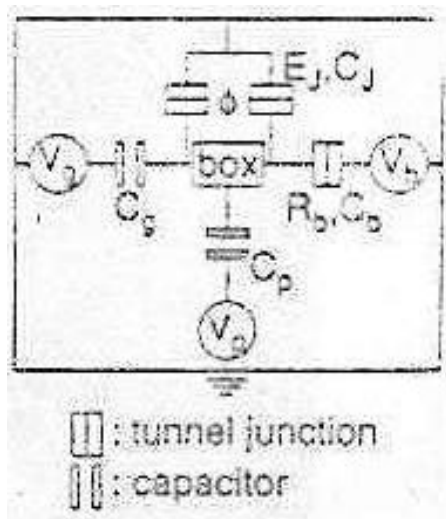
- Dephasierung des Qubits
- Tunnelstrom durch SET ist proportional zur Inselladung
- Arbeitspunkt an steiler Flanke

8. Experimentelle Realisierungen

(Nakamura et al., 1999)

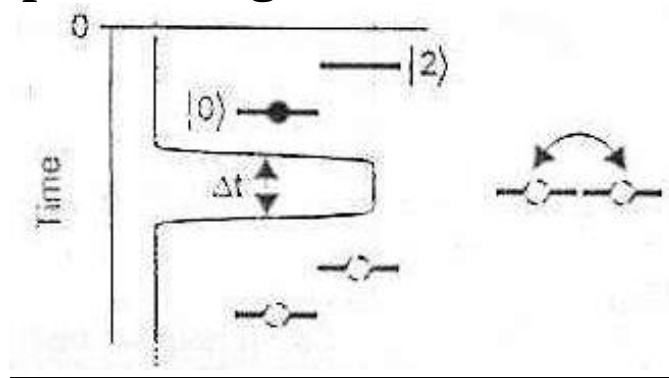


Mikroskopische Aufnahme



Schaltskizze

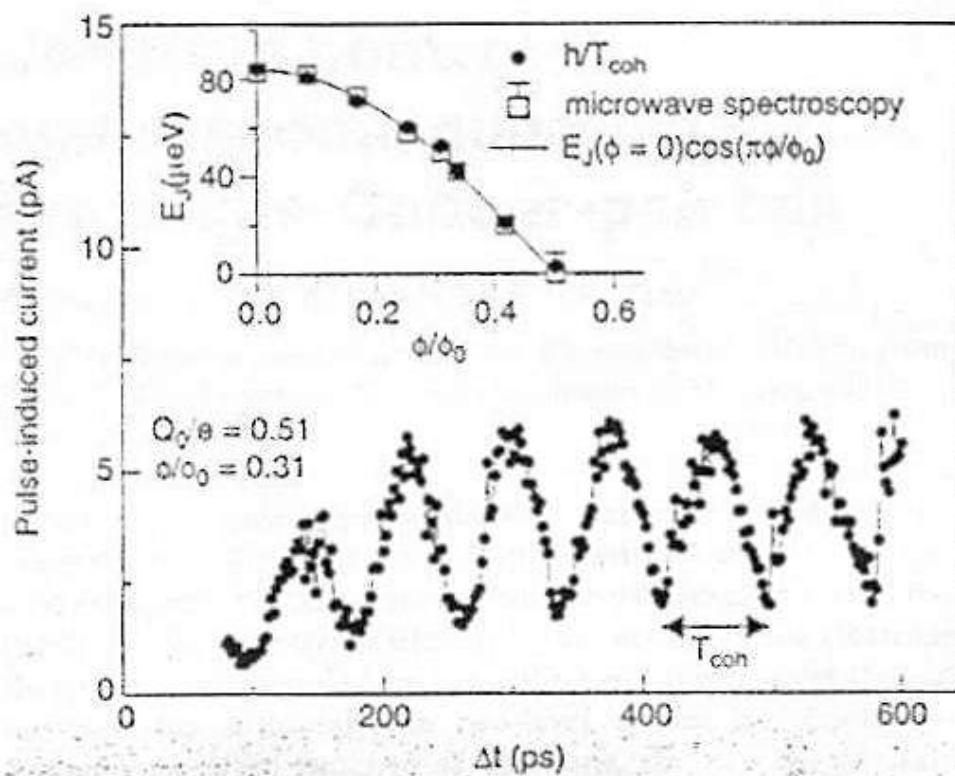
Spannungspuls bringt Zustände in Resonanz



Gründe für das Tunneln:

1. Nachweis des Zustands $|2\rangle$ durch zwei tunnelnde Elektronen
2. Relaxieren der Box in Grundzustand, mit Pulswiederholrate $T_r > T_{\text{relax}}$ mißt man dauerhaft Detektorstrom

hier im Experiment Pulshöhe nicht meßbar
=> Pulshöhe und Rate konstant,
Ladung Q_0 auf Box variiert



pulsinduzierter Strom (*unten*)

Berechnung der Kopplungsenergie E_J (*oben*)

9. Literaturangaben

- [1] Harald Ibach, Hans Lüth: Festkörperphysik, Kap.10 und Tafel IX (Springer, 4. Aufl.)
- [2] Yuriy Makhlin, Gerd Schön, Alexander Shnirman: Computer Physics Communications 127 (2000) 156-164
- [3] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, J.S. Tsai: Nature 398, 786-788 (1999)
- [4] Heinz Hövel, Einzelelektronen-Transistoren, Dortmund (12.12..2000);
http://e3.physik.uni-dortmund.de/~suter/Seminare/QC-Seminar_WS00/Quantencomputer.html
- [5] L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven, G. Schön (editors): „Mesoscopic Electron Transport”, NATO ASI Series E, Applied Sciences, Vol.345, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1997)